I. S. C. I. D. — Régime Général

CONCOURS A 1987

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures — Coefficient : 5

PROBLEME I

$\mathbb{R}[X]$ est l'espace vectoriel des polynomes à coefficients réels.
E est le sous espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynomes de degré inférieur ou égal à deux et du polynome nul.
$B = (1, X, X^2)$ est la base canonique de E.
Si P est un élément de E on note P' son polynome dérivé d'ordre un et P" son polynome dérivé d'ordre deux.
(a,b) étant un couple de réels on note $U_{a,b}$ l'endomorphisme de E défini par :

$\forall P \in E \quad U_{a,b}(P) = (a + X^2) P'' + (1 + b X) P'$

Question 1

1) Montrer que $C = (1, 1 - X, 2X + X^2)$ est une base de E.

2) Donner dans la base C les coordonnées de $P = 1 + X + X^2$

Question 2

Déterminer les couples (a,b) de réels tels que si le réel 1 est zéro d'ordre deux de P un polynome non nul de E alors le réel 1 est zéro de $U_{a,b}(P)$.

Question 3

1) Ecrire la matrice de $U_{a,b}$ dans la base B. On notera $M_{a,b}$ cette matrice.

2) Déterminer les couples (a,b) de réels tels qu'il existe un polynome non nul de E vérifiant $U_{a,b}(P) = -P$

3) Etudier le rang de la matrice $M_{a,b}$ suivant les valeurs des réels a et b.

Question 4

On suppose dans cette question que $b = -1$ et l'on pose $f_a = U_{a,-1}$ et $A_a = M_{a,-1}$ pour simplifier l'écriture.

1) Préciser le noyau et l'image de f_{-1}

2) $(a,a') \in \mathbb{R}^2$. Calculer le produit matriciel $A_a \cdot A_{a'}$

La loi o étant l'habituelle loi de composition des applications, exprimer $f_a \circ f_{a'}$ a l'aide de f_{-1} et calculer pour n entier naturel supérieur ou égal à deux la composée f_a^n de n endomorphismes égaux à f_a.

3) Montrer que dans la base C de E la matrice de f_a^n pour n entier naturel supérieur ou égal à deux est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha_n \in \mathbb{R}$$

4) I_E étant l'identité sur E on pose $\varphi_a = f_a^2 + I_E$. Ecrire dans la base C la matrice de φ_a. En déduire que φ_a est inversible et écrire dans la base C la matrice de φ_a^{-1} l'inverse de φ_a

Résoudre dans E l'équation

$f_a^2(P) + P - (1 + X + X^2) = 0$

PROBLEME II

(A)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $t \longmapsto e^t - t$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto \dfrac{1}{e^t - t}$

On note C_g la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé R_1 (unité 2 cm) et C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé R_2 (unité 10 cm).

Question 1

1) Donner le tableau de variation de g.

2) Démontrer les inégalités suivantes

(I_1) $\quad \forall t \in]-\infty, 0[\quad -t < g(t) < 1 - t$

(I_2) $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) \geqslant \dfrac{e-1}{e} e^t$

3) Etudier les branches infinies de C_g.

4) Tracer la courbe C_g dans le repère R_1.

Question 2

1) a) Calculer la dérivée de f.

b) Montrer que g et f sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour p entier naturel non nul on note $f^{(p)}$ la dérivée d'ordre p de f, $f^{(0)}$ représente la fonction f elle-même. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(e^t - t) f^{(n)}(t) + n(e^t - 1) f^{(n-1)}(t) + e^t \sum_{k=2}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(t) = 0$$

En déduire les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \qquad f^{(n)}(0) = -\sum_{k=2}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(0)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \qquad f^{(n)}(1) = -n \cdot f^{(n-1)}(1) - \frac{e}{e-1} \sum_{k=2}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(1)$$

2) Ecrire a) le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de $t = 0$
b) le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $t = 1$

3) Donner le tableau de variation de f. Préciser le comportement de f au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$

4) Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point A d'abscisse $t = 1$ et préciser la position de C_f par rapport à T au voisinage de $t = 1$

5) a) Montrer que la dérivée seconde de f peut s'écrire sous la forme : $e^t \cdot \dfrac{1}{(e^t - t)^3} \cdot h(t)$ avec $h(t) = e^t + t + 2e^{-t} - 4$

b) Etudier le signe des dérivées seconde et première de h et montrer que h s'annule pour deux valeurs α et β telles que
$-1 < \beta < 0 < \alpha < 1$
Que peut-on déduire pour C_f ?

c) Calculer une valeur de α à 10^{-2} près.

TSVP.

6) Tracer la droite T et la courbe C_f dans le repère R_2 . On placera en particulier les points de C_f d'abscisses $-\frac{1}{2}$, 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1 , $\frac{3}{2}$ et 2.

(B)

La notation ln(t) représente pour t réel strictement positif le logarithme népérien de t.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longrightarrow \int_0^x f(t)\,dt$ et l'on note C_F sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal R_3 .

Question 1

1) Montrer que F est dérivable, strictement monotone sur $\mathbb{R}$
Donner le tableau de variation de F.

2) Ecrire le développement limité de F à l'ordre 3 au voisinage de x = 0 . Donner une équation de la tangente à C_F au point d'abscisse x = 0 et préciser la position de C_F par rapport à sa tangente au voisinage de x = 0 .

Question 2

1) Démontrer les inégalités suivantes

(I'_1) $\forall\, t \in]-\infty , 0[$ $\qquad \frac{1}{1-t} < f(t) < -\frac{1}{t}$

(I'_2) $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $\qquad f(t) \leqslant \frac{e}{e-1}\, e^{-t}$

2) a) Démontrer que :

$\forall\, x \in]-\infty , -1]$ $\quad -\ln(-x) \leqslant F(x) - F(-1) \leqslant \ln(2) - \ln(1-x)$

b) Calculer quand x tend vers $-\infty$ la limite de F(x) et celle de $\frac{F(x)}{x}$. Que peut-on en conclure pour la courbe C_F au voisinage de $-\infty$?

3) Montrer que F(x) admet une limite L quand x tend vers $+\infty$ et que $L < \frac{e}{e-1}$.
Que peut-on en déduire pour la courbe C_F au voisinage de $+\infty$?

4) Donner l'allure de C_F dans le repère R_3 .

• • •